

非线性扩散和变分模型在矢量图像去噪中的应用

史 渊 潘振宽 魏伟波

(青岛大学信息工程学院, 青岛 266071)

摘 要 分析了非线性扩散、基于整体变分方法的 ROF 模型以及矢量图像耦合技术的原理, 比较了这些扩散、去噪模型的优缺点。根据矢量图像耦合思想将 TV 流运用到矢量图像扩散中, 并参考 ROF 模型逼近项变分模型的优点, 提出了基于非线性扩散、ROF 模型和矢量图像耦合原理的改进 TV 流矢量图像耦合扩散模型, 目的是在彩色图像中, 去噪同时更好地保留图像轮廓、边缘等重要信息。实验对比分析了改进前后模型的去噪效果, 并分析了改进模型下正、逆向扩散在彩色图像去噪中的作用。实验结果表明, 改进的矢量图像耦合扩散模型能有效地保持彩色图像中的边缘信息, 同时具有良好的去噪性能, 且改进模型下, 正、逆向扩散的性质在彩色图像去噪工作中仍能保持。

关键词 非线性扩散 整体变分 图像去噪模型 整体变分流 彩色图像耦合

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2007)12-2101-04

Color Image Denoising Based on Nonlinear Diffusion and TV Method

SHI Yuan, PAN Zhen-kuan, WEI Wei-bo

(College of Information and Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071)

Abstract Both nonlinear diffusion and TV method based ROF model are analyzed in this paper, and a basic coupled method for color image is mentioned. In order to remove noise effectively and preserve edges and key details in color image, considering the information of each channel of color image and the advantages of denoising and edges preservation of TV flow and ROF model, a improved channel coupled diffusion model which based on TV flow is proposed, different effects among uncoupled diffusion model, channel coupled diffusion model and improved channel coupled diffusion model are analyzed, and different effects among forward diffusion, TV flow and backward diffusion based on the new model are also discussed. Experimental results show that, 1) The improved channel coupled diffusion model is better preserving geometric information such as edges in addition to its effectiveness for image denoising. 2) The properties of forward and backward diffusion based on the new model are not changed in color image denoising.

Keywords nonlinear diffusion, total variation, ROF model, TV flow, color image coupling

1 引言

图像去噪是图像处理中的重要研究内容。非线性扩散技术^[1]是目前应用较广的一种图像去噪方法。它的基本思路是在区域和目标边缘处采用不同的平滑策略: 在区域内加速平滑, 而在边缘处抑制平滑。非线性扩散和高斯卷积运算有着非常紧密的联系。如果不考虑图像边缘信息, 非线性扩散就可以被看作是各项同性扩散, 也就是图像卷积上一个高斯核函数。通常图像可看作是 2 维连续空间中的函

数 $I: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 。为了对其进行取值, 将图像看成是大量按一定规律排列的点的集合。差值的方法之一是使用时间行进法。 $u(x, y, t)$ 从 $t=0$ 时刻开始, 利用偏微分方程对图像 $I(x, y)$ 进行演化。各项同性扩散的偏微分方程可写为如下形式:

$$\partial_t u = \Delta u = \text{div}(\nabla u) \quad (1)$$

式中, Δ 代表拉普拉斯算子 $\partial_x^2 + \partial_y^2$, ∇ 是梯度算子 $(\partial_x, \partial_y)^T$ 。如果演化在 T 时刻停止, 就相当于将图像与标准差 $\sigma = 2\sqrt{T}$ 的高斯核函数进行卷积^[2]。这种高斯卷积和非线性扩散之间的关系非常有用, 可以用对边缘有保持作用的非线性扩散来替换各项同

收稿日期: 2007-06-01; 改回日期: 2007-07-19

第一作者简介: 史渊(1982 -), 男, 现为青岛大学信息工程学院计算机应用专业硕士研究生。主要研究方向为基于偏微分方程的图像处理。E-mail: syinside1@hotmail.com

性扩散(高斯卷积运算)操作。

另一种常用的去噪方法基于变分思想。为图像确定一个适当的能量函数并对其最小化。通过对能量函数的最小化,使得图像达到平滑状态,去除噪声。现在应用比较广泛的模型是基于整体变分 TV (total variation) 思想的 ROF 非线性整体变分去噪模型^[3]。这个模型的关键思想是在对图像进行平滑的同时可以最大限度地保留图像中的特征信息(轮廓、边缘等),通过迭代求解其能量最小值,获得比较理想的效果。相比于第 1 种方法,这种方法在去噪的同时具有更好的特征保留能力,且具有明确的理论解释。

矢量图像始终是人们关注的热点,但由于牵涉到图像耦合技术,所以这方面研究相对较少。本文根据文献[4]中的思想,提出一种基于 TV 流图像扩散模型的矢量图像扩散模型,结合 ROF 去噪模型去噪和边缘保留的特点,对矢量图像进行去噪,取得了不错的效果。

2 去噪模型与耦合技术

2.1 非线性扩散技术

非线性扩散首先是由 Perona 和 Malik 提出的^[5],许多学者对此进行了扩展^[6]。Perona 和 Malik 使用时间进行迭代对图像进行演化,其扩散方程为

$$\partial_t u = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2) \nabla u) \quad (2)$$

Perona 和 Malik 在文献[5]中提出了两个扩散函数:

$$g(|\nabla u|^2) = \frac{1}{1 + |\nabla u|^2/\lambda^2} \quad (3)$$

$$g(|\nabla u|^2) = e^{-|\nabla u|^2/(2\lambda^2)} \quad (4)$$

可以通过考虑扩散方程的 1 维形式

$$\partial_t u = \partial_x(g(|\nabla u|^2)u_x) = f'(u_x)u_{xx} \quad (5)$$

式中,用 $f'(u_x)$ 的正负来区分方程的两种不同形式。当 $f'(u_x) > 0$ 时,称为正向扩散^[1,7]。在正向扩散中,像素值总是从高的像素区域传送到低的像素区域:中心像素总是将其值分给四周相邻的低像素值点,而相对从四周相邻的高像素值点获取值较少,这就导致中心像素值大的点总是在减小,而中心像素值小的点总是在增大。这和物理中的热传导一样,高温点向低温点输送能量降温,低温点接受能量升温。直到迭代时刻终止,使得整块平板的温度趋于平衡。所以图像轮廓会被模糊。当 $f'(u_x) < 0$ 时,称之为逆向扩散^[1,7]。同正向扩散相反,中心像

素总是从四周相邻的高像素值点取值,而相对赋给四周相邻低像素值点的值较少,所以中心像素大的点,其值会不断增加,而中心像素值小的点其值继续减小。这个过程可以看作是热量扩散的逆过程,所以也叫作逆向扩散。

2.2 ROF 去噪模型和 TV 流

Rudin, Osher 和 Fatemi 从另一个角度研究图像去噪问题^[3],他们考虑图像的能量方程,并对噪声加以适当的约束,得出图像去噪模型:

$$\int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\Omega} (u - f)^2 dx \quad (6)$$

式中, $\int_{\Omega} (u - f)^2 dx$ 为根据噪声方差而定的逼近项,它使迭代后的图像不会较大偏离原图像。其去噪结果应为加入逼近项后能量函数的最小值。

ROF 模型的欧拉-拉格朗日方程如下:

$$\frac{1}{2\lambda} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + (f - u) = 0 \quad (7)$$

考虑

$$\partial_t u = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|^p}\right) \quad (8)$$

$p=1$ 。这里令 $g(|\nabla u|) = 1/|\nabla u|^p$, 式(8)为 TV 流扩散模型, $g(|\nabla u|)$ 为 TV 流^[8]。同样考虑扩散函数的 1 维情况:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \partial_x(g(|\nabla u|)u_x) = f'(u_x)u_{xx} \quad (9)$$

可知 $f(u_x) = g(|\nabla u|)u_x$ 的 1 阶导数 $f'(u_x) = 0$, 所以 TV 流是介于正向扩散和逆向扩散之间的一种扩散函数,它是稳定的,具有全局最优解,可以获得最佳的扩散和边缘保留效果。

由于 ROF 模型拥有 TV 流的良好性质,所以在去噪和特征保持中可以获得最好的效果。

2.3 矢量图像耦合技术

扩散方程式(8)只能处理标量图像,对于矢量图像 $I = (I_1, \dots, I_M)$, 例如彩色图像,需要对其进行耦合。对每个通道单独进行平滑是容易实现的,但这并不是最佳选择。单独平滑会带来一些问题,最明显的问题是对于不同通道中相同边缘的平滑可能不同,因为相同边缘在不同通道中的图像强度不同,这就导致有些通道中的边缘被保留,而有些则被扩散。所以在每个通道上单独执行扩散忽略了其他通道上的附加信息。为了全面考虑所有通道中的图像特征信息,对所有通道进行耦合是必要的。文献[4]中提出了一种耦合方法:

$$\partial_t u_i = \operatorname{div} \left(g \left(\sum_{k=1}^M |\nabla u_k|^2 \right) \nabla u_i \right) \quad (10)$$

式中, M 为通道数量。

这样在平滑每个像素时都会考虑到其他通道上像素的梯度信息。

3 改进的矢量图像耦合扩散模型

3.1 改进的矢量图像耦合扩散模型

通过研究以上 3 种技术,提出一种改进的矢量图像扩散模型。目的在于对矢量图像耦合通道扩散去噪图像的同时和更好的保留图像的轮廓、边缘信息。

TV 流是介于正向扩散和逆向扩散之间的一种扩散函数,可以获得较好的去噪和边缘保持效果。这里将这种性质运用到矢量图像扩散中。

根据 2.3 节中介绍的耦合思想,将 $g(|\nabla u|)$ 写为 $g\left(\sqrt{\sum_{k=1}^M |\nabla u_k|^2}\right)$ 的形式。矢量图像 TV 流扩散方程可写为如下形式:

$$\partial_t u_i = \operatorname{div} \left(g \left(\sqrt{\sum_{k=1}^M |\nabla u_k|^2} \right) \nabla u_i \right) \quad (11)$$

式中, $g\left(\sqrt{\sum_{k=1}^M |\nabla u_k|^2}\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^M |\nabla u_k|^2}\right)^P}$

$P = 1$ 。这样矢量图像扩散不只考虑单个通道的信息,而且全面考虑图像各通道之间的相互关系,综合其他通道的信息,从而能够获得更好的去噪效果。

同时,通过研究 ROF 模型的欧拉-拉格朗日方程和标量图像扩散模型,比较两者异同点,发现两者差别仅在于 ROF 模型的变分方程中增加了 $(f-u)$ 项。比较可知, $(f-u)$ 项通过 ROF 模型中逼近项求变分得来,而逼近项的作用在于使图像在去噪同时最大限度接近原图像。基于这个性质,将 $(f-u)$ 加入耦合图像扩散模型中。

最终改进后的耦合矢量图像扩散模型为

$$\partial_t u_i = \frac{1}{2\lambda} \operatorname{div} \left(g \left(\sqrt{\sum_{k=1}^M |\nabla u_k|^2} \right) \nabla u_i \right) + (f_i - u_i) \quad (12)$$

改进后的耦合扩散模型式(12)和未改进的耦合扩散模型式(11)拥有相近的形式,但在改进模型后部添加了 $(f-u)$ 项。实验结果表明,使用新模型去噪后的图像几何轮廓更为清晰。

3.2 以上几种方法比较

通过上面的分析,容易看出非线性扩散技术可以在去除噪声的同时考虑到图像边缘信息,但其没有明确的能量函数,理论解释不如基于变分理论的去噪模型深入。

基于变分理论的 ROF 模型作为目前比较成熟的图像去噪模型,具有确定的能量函数,符合图像的轮廓特征,拥有最优解条件下的去噪效果,所以对于去噪及边缘保留都有很好的效果。

矢量图像的耦合能够综合利用各通道上的信息,使平滑去噪及边缘保留效果比单个通道分别去噪更好。

而改进的扩散模型综合运用以上 3 种技术,不仅将扩散技术扩展到矢量图像上,而且在去除噪声的同时更好地保留了图像的边缘、轮廓信息,在彩色图像去噪和边缘保持工作上获得了良好的效果。

4 实验结果及分析

4.1 去噪及边缘保持效果对比分析

首先比较未耦合的图像扩散模型、耦合彩色图像扩散模型和改进后的耦合彩色图像扩散模型的去噪效果。

图 1(a) 为 256×256 像素的 Lena 彩色图像,图 1(b) 为在图 1(a) 上加入高斯噪声的图像 ($\text{SNR} = 1.9648$),图 1(c) 为使用未耦合 TV 流扩散模型



图 1 各种模型去噪效果对比

Fig. 1 Experiment results of different models

式(8)分别对每个通道进行去噪, $\lambda = 0.005, \Delta t = 5$, 迭代 30 次后的去噪效果; 图 1(d) 为使用耦合通道 TV 流扩散模型式(11), $\lambda = 0.005, \Delta t = 5$, 迭代 30 次后的去噪效果; 图 1(e) 为使用改进的耦合通道 TV 流扩散模型式(12), $\lambda = 0.005, \Delta t = 0.05$, 迭代 20 次后的去噪效果。以上去噪均采用显式时间行进法迭代。

从图 1 可以看出, 无论未耦合扩散模型式(8) (图 1(c))、耦合扩散模型式(11) (图 1(d)) 或改进的耦合扩散模型式(12) (图 1(e)) 都具有较好的去噪效果。但和模型式(8) 相比, 应用通道耦合技术的扩散模型式(11)、式(12) 在不同程度上提升了对图像的特征保留能力; 而改进后耦合通道的扩散模型式(12) 显示出了良好的去噪效果, 且图像轮廓较前两者清晰, 信噪比更高, 说明改进后的模型具有更好的边缘保持能力。

4.2 正、逆向扩散效果对比分析

下面讨论改进耦合扩散模型式(12) 中耦合 TV

$$g \left(\sqrt{\sum_{k=1}^M |\nabla u_k|^2} \right) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^M |\nabla u_k|^2} \right)^P}, \text{ 参数}$$

$P = \{0.8, 1, 1.2\}$ 的情况对图像去噪的影响。

图 2(a) 为 $P = 0.8, \lambda = 0.01, \Delta t = 0.1$, 使用改进模型式(12) 迭代 20 次后的去噪效果; 图 2(b) 为 $P = 1, \lambda = 0.005, \Delta t = 0.05$, 使用改进模型式(12) 迭代 30 次后的去噪效果; 图 2(c) 为 $P = 1.2, \lambda = 0.01, \Delta t = 0.5$, 使用改进模型式(12) 迭代 100 次后的去噪效果。以上扩散均采用显式时间行进法进行迭代。



图 2 不同 P 值下扩散结果对比

Fig. 2 Comparing diffusing images with different values of P

从图 2 可以看出, 图 2(a) 中, $P < 1$ 模型表现出正向扩散性质, 模型的去噪效果明显, 但图像特征信息如边缘的保留效果被弱化, 一些图像边缘被模糊; 图 2(c) 中, $P > 1$ 模型呈现逆向扩散性质, 图像的边缘保留效果明显, 但模型的去噪效果被弱化, 去噪后的图像保留了部分噪声。这说明正向扩散和逆向扩散在矢量图像扩散中显示出和标量图像相似的去噪

及特征保留效果。

同时从图 2(b) 中可以看出, TV 流 ($P = 1$) 是介于正向扩散和逆向扩散之间的一种扩散形式, 它分别兼顾了正向扩散和逆向扩散的去噪和边缘保持性能, 并且这种性质在多通道耦合之后仍能保持。

5 结 论

分析了图像扩散、图像去噪和通道耦合技术的理论原理, 比较了不同扩散、去噪模型的优缺点, 提出了基于以上 3 种技术的改进耦合图像扩散模型, 并进一步研究了改进模型下正、逆向扩散的具体表现。实验结果表明, 改进的矢量图像耦合扩散模型能很好地保持彩色图像中的边缘信息, 同时具有良好的去噪效果, 且改进模型下正、逆向扩散和 TV 流的性质在彩色图像去噪工作中仍能保持。

参考文献 (References)

- 1 Brox T. From pixels to regions: Partial differential equations in image analysis[D]. Germany: Department of Mathematics and Computer Science, Saarland University, 2005.
- 2 Weickert J, Ishikawa S, Imiya A. Linear scale-space has first been proposed in Japan[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1999, 10(3): 237 ~ 252.
- 3 Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60: 259 ~ 268.
- 4 Gerig G, Kübler O, Kikinis R, et al. Nonlinear anisotropic filtering of MRI data[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1992, 11: 221 ~ 232.
- 5 Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12: 629 ~ 639.
- 6 Wang Yi, Zhang Liang-pei, Li Ping-xiang. An improved algorithm of anisotropic diffusion smoothing filter [J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(2): 210 ~ 216. [王毅, 张良培, 李平湘. 各项异性扩散平滑滤波的改进算法[J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(2): 210 ~ 216.]
- 7 Wu Ji-ying, Ruan Qiu-qi. PDEs applied in image denoising [J]. Computer Engineering and Applications, 2006, 22: 69 ~ 71. [作冀颖, 阮秋琦. 偏微分方程在图像去噪中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2006, 22: 69 ~ 71.]
- 8 Dibos F, Koepfler G. Global total variation minimization[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000, 37(2): 646 ~ 664.